$$[k_e] = k \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin\cos & -\cos^2 & -\sin\cos \\ \sin\cos & \sin^2 & -\sin\cos & -\sin^2 \\ -\cos^2 & -\sin\cos & \cos^2 & \sin\cos \\ -\sin\cos & -\sin^2 & \sin\cos & \sin^2 \end{bmatrix}$$

$k = \frac{AE}{L}$

ماتریس سختی یک المان خرپا

محاسبه‌ی تنش و کرنش: (برحسب u)

$u_1 = U_1\cos\theta + U_2\sin\theta$

$u_2 = U_3\cos\theta + U_4\sin\theta$

کرنش $\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[N_1(x) \quad N_2(x)]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L}$

تنش $\sigma = E\varepsilon = E\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)$

محاسبه‌ی تنش و کرنش: (برحسب U)

$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[N_1(x) \quad N_2(x)][R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$

$\sigma = E\frac{d}{dx}[N_1(x) \quad N_2(x)][R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$

کششی $\sigma > 0$

فشاری $\sigma < 0$

$R = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & \sin \end{bmatrix}$

محاسبه‌ی نیروی المان:

$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

K برای هر المان جداگانه محاسبه می‌شود و در ماتریس بالا واریس گذارده می‌شود:

$K_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1}$

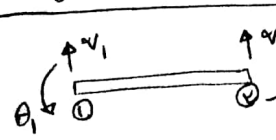
اگر خواستیم نیروی المان را با u بیان کنیم:

$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

برحسب F و U:

$[Ke]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$

المان تیر:



$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2$

$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$, $N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$

$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$, $N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$

مقادیر تنش: (اکسترمم)

$\sigma_{x(x)} = y_{max} E \frac{d^2[N]}{dx^2}[\delta]$

$\sigma_{x(x=0)} = y_{max} E\left[\frac{6}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{2}{L}(2\theta_1 + \theta_2)\right]$

$\sigma_{x(x=L)} = y_{max} E\left[\frac{6}{L^2}(v_1 - v_2) + \frac{2}{L}(2\theta_2 + \theta_1)\right]$

استفاده از قضیه‌ی کاستیلیانو:

$U_e = \int \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dv$

$U_e = \frac{EI_z}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$

$\frac{\partial U_e}{\partial v_1} = F_1$, $\frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} = M_1$, $\frac{\partial U_e}{\partial v_2} = F_2$, $\frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} = M_2$

ماتریس سختی المان تیر:

$K = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

روش کار معادل برای بارهای گسترده:

$W = \int_0^L q_{(x)} v_{(x)} dx$

$W = F_1 v_1 + M_1\theta_1 + F_2 v_2 + M_2\theta_2$

$W = \int_0^L q_{(x)}\left[N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2\right]dx$

$F_1 = \int_0^L q_{(x)} N_1(x)dx$, $F_2 = \int_0^L q_{(x)} N_3(x)dx$

$M_1 = \int_0^L q_{(x)} N_2(x)dx$, $M_2 = \int_0^L q_{(x)} N_4(x)dx$

ماتریس سختی برای المان تیر با بار محوری:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$